Université de Lomé
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Exercices d'Analyse Mathématique

Yaogan MENSAH

Exercices d'Analyse Mathématique

Yaogan MENSAH [1]

As are the crests on the heads of peacocks
As are the gems on the hoods of cobras
So is Mathematics at the top of all sciences.
The Yajurveda, Circa 600 B. C.

1. Enseignant-Chercheur/ Université de Lomé (Togo)

Préface

Dans cet ouvrage nous passons en revue les principaux résultats d'Analyse de Base puis nous proposons à chaque fois un certains nombres d'exercices de niveaux variables. Plus précisement nous abordons les thèmes suivants : Propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$, Suites de nombres réels, Limites et Continuité, Dérivation-Formule de Taylor, Développements limités, Fonctions convexes, Séries numériques.
Certains des exercices proposés ne sont que des applications directes du Cours mais d'autres sont relativement difficiles. Le lecteur est invité à les chercher sérieusement et patiemment.
Nous accueillerons avec reconnaissance les critiques (constructives) et suggestions que voudront bien nous faire part nos lecteurs. Nous les en remercions d'avance.

Lomé, le 13 janvier 2012.
Y. Mensah
email : mensahyaogan2@yahoo.fr

Table des matières

Chapitre 1

Propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$

1.1 Résumé de Cours

Définition 1.1 *Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite* **majorée** *(resp.* **minorée***) si*

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq M (resp.\ x \geq M) \tag{1.1}$$

On dit que M est un majorant (resp. un minorant).

Définition 1.2 *La* **borne supérieure** *(resp.* **borne inférieure***) de A est le plus petit des majorants (resp. le plus grand des minorants de) de A.*

La borne supérieure (resp. inférieure) de A se note $\sup A$ (resp. $\inf A$).

Principe : Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).

Proposition 1.3 $\beta = \sup A$ *si et seulement si*

1. $\forall x \in A,\ x \leq \beta$,
2. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in A$ *tel que* $x_0 > \beta - \varepsilon$.

Proposition 1.4 $\alpha = \inf A$ *si et seulement si*

1. $\forall x \in A,\ x \geq \alpha$.
2. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in A$ *tel que* $x_0 < \alpha + \varepsilon$.

Théorème 1.5 $\forall \rho, \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n\varepsilon > \rho$.

On exprime cette propriété en disant que $\mathbb{R}$ est *archimédien*.

Définition 1.6 *Une partie D de $\mathbb{R}$ est dite* **dense** *dans $\mathbb{R}$ si*

$$\forall a, b \in \mathbb{R}\ (a < b), \exists d \in D, a < d < b. \tag{1.2}$$

Théorème 1.7 *$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.*

Définition 1.8
1. *Une partie V de $\mathbb{R}$ est appelée* **voisinage** *de $a \in \mathbb{R}$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset V$.*
2. *$a \in \mathbb{R}$ est appelé* **point d'accumulation** *de $A \subset \mathbb{R}$ si pour tout voisinage V de a, $V \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset$.*

Théorème 1.9 *(Bolzano[1]-Weierstrass[2])*
Toute partie infinie et bornée de $\mathbb{R}$ admet un point d'accumulation.

1.2 Exercices

Exercice 1. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2. Soit

$$I = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2\}.$$

1. Montrer que I est la réunion de deux intervalles.
2. Déterminer, s'ils existent, les majorants, les minorants, la borne inférieure, la borne supérieure, le plus grand élément et le plus petit élément de I.

Exercice 3. On considère l'ensemble

$$A = \{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}.$$

A est-il majoré ? minoré ? a-t-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?

Exercice 4. Soit $A, B \subset \mathbb{R}$, A, B non vides et majorés. On pose

$$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$$

$$AB = \{ab : a \in A,\ b \in B\}.$$

---

1. Bernard Bolzano (1781-1848), mathématicien tchèque
2. Karl W. T. Weierstrass (1815-1897), mathématicien allemand

1. Montrer que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.
2. On suppose $A, B \subset \mathbb{R}_+$. Montrer que $\sup(AB) = \sup A \sup B$.
3. Montrer que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

Exercice 5. Montrer que si $\alpha = \sup A$ alors il existe une suite d'éléments de A qui converge vers α. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 6. Soit $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, les a_i n'étant pas tous nuls. On considère le polynôme $P(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + x b_i)^2$.

1. Montrer que le discriminant de P est négatif.
2. En déduire que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Chapitre 2

Suites de nombres réels

2.1 Résumé de Cours

Définition 2.1 *Une suite de nombres réels est une fonction de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$*.*

Définition 2.2 *Une suite* (u_n) *est dite* **convergente***, de limite* $l \in \mathbb{R}$*, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon). \tag{2.1}$$

Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.

Théorème 2.3 *Si* (u_n) *converge vers* l *et vers* l' *alors* $l = l'$*.*

Théorème 2.4 *Toute suite* (u_n) *de nombres réels croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) est convergente. De plus* $\lim u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ *(resp.* $\lim u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$*).*

Définition 2.5 *Une suite de* (u_n) *est dite de* **Cauchy**[1] *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, (p \geq n_0 \text{ et } q \geq n_0 \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon). \tag{2.2}$$

Théorème 2.6 *Une suite de nombres réels est convergente ssi elle est de Cauchy.*

On l'exprime en disant que $\mathbb{R}$ est **complet**.

1. Augustin Louis Cauchy (1789-1857), mathématicien français

Définition 2.7 *Une* **suite extraite** *d'une suite (u_n) est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.*

Théorème 2.8 *Une suite (u_n) est convergente ssi toute suite extraite de (u_n) est convergente. Dans ce cas toutes les suites extraites de (u_n) convergent vers la même limites, celle de (u_n).*

Théorème 2.9 *Une suite (u_n) est convergente ssi les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite.*

Théorème 2.10 (Bolzano-Weierstrass) *De toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.*

Définition 2.11 *Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites* **adjacentes** *si*

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$,
3. $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} \leq v_n$,
4. $\lim(v_n - u_n) = 0$.

Théorème 2.12 *Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.*

Définition 2.13 *La suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme et par une formule de la forme*

$$u_{n+1} = f(u_n) \tag{2.3}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction.

Théorème 2.14 *Si f est continue et si (u_n) est convergente , de limite l, alors $l = f(l)$.*

Définition 2.15 *Une suite* **récurrente linéaire du second ordre** *est une suite définie par la donnée de ses deux premiers termes et par une formule de la forme*

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \text{ où } (a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Soit (u_n) une suite récurrente linéaire du second ordre. On pose $P(r) = ar^2 + br + c$.

1. Si $\Delta > 0$, soit r_1, r_2 les racines réelles de P. u_n prend la forme
$$u_n = Ar_1^n + Br_2^n. \tag{2.5}$$
2. Si $\Delta = 0$, soit r_0 l'unique racine de P. u_n prend la forme
$$u_n = Ar_0^n + Bnr_0^{n-1}. \tag{2.6}$$
3. Si $\Delta < 0$, soit $r_1 = [\rho, \theta], r_2 = [\rho, -\theta]$ les racines complexes de P. u_n prend la forme
$$u_n = \rho^n(A\cos n\theta + B\sin n\theta). \tag{2.7}$$

2.2 Exercices

Exercice 1. Etudier la convergence de la suite $u_n = (-1)\dfrac{n+1}{n}$.

Exercice 2. Etudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

Exercice 3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Etudier la limite de la suite $u_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} E(kx)}{n^2}$.

Exercice 4. Calculer le terme général puis préciser la nature de la suite (u_n) définie par
$$u_0 = 12, u_1 = 31, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

Exercice 5. Déterminer la limite de la suite
$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}.$$

Exercice 6. Soient $p, q \in]0, +\infty[,\ a_0, b_0 \in \mathbb{R},\ b_0 > a_0$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par
$$u_n = \frac{pu_{n-1} + qv_{n-1}}{p+q},\ v_n = \frac{qu_{n-1} + pv_{n-1}}{p+q}.$$
Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

Exercice 7. A toute suite (u_n) est associée la suite (v_n) définie par
$$v_n = \frac{u_0 = u_1 + \ldots + u_{n-1}}{n}.$$
Si (v_n) converge, on dit que (u_n) converge **au sens de Cesàro**[2] .

2. Ernesto Cesàro (1859-1906), mathématicien italien

1. Montrer que si (u_n) converge vers l alrs elle converge vers l au sens de Cesaro.
2. Etudier la réciproque en considérant les cas $u_n = (-1)^n;\ u_n = \sin n$.

Chapitre 3

Limites et Continuité

3.1 Résumé de Cours

Toutes les fonctions considérées sont des fonctions réelles d'une variable réelle.

Définition 3.1 *1. Soit* $a, l \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, (|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon). \tag{3.1}$$

2. Soit $l \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, (x > \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon). \tag{3.2}$$

Remarque : Nous laissons le soin au lecteur d'écrire les autres cas possibles.

Théorème 3.2 *Si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ *et* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l'$ *alors* $l = l'$.

Théorème 3.3 *Si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ *et* $\lim\limits_{x \to b} g(x) = l$ *alors* $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = l$.

Théorème 3.4 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ *ssi pour toute suite* (u_n),

$$(u_n \to a \Rightarrow f(u_n) \to l).$$

Définition 3.5 *1.* $f = \underset{a}{\circ}(g)$ *si* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

2. $f \underset{a}{\sim} g$ *si* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

3. *$f = \underset{a}{O}(g)$ si $\dfrac{f}{g}$ est bornée dans un voisinage (pointé) de a.*

Remarque : L'équivalence $\sim$ est compatible avec le produit (et le quotient) mais ne l'est pas avec la somme (et la différence).

Proposition 3.6 *Equivalences usuelles en 0 :*
$\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $1 - \cos x \sim \dfrac{x}{2}$, $(1+x)^\alpha \sim \alpha x$.

Définition 3.7 1. *f est dite* **continue** *en a si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, (|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon). \tag{3.3}$$

2. *f est dite continue sur un ensemble I si elle l'est en tout point de I.*

Théorème 3.8 *f est continue en a ssi pour toute suite (u_n),*

$$(u_n \to a \Rightarrow f(u_n) \to f(a)).$$

Théorème 3.9 (Weierstrass) *Si f est continue sur l'intervalle $[a,b]$, alors f est bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes.*

Théorème 3.10 (Cauchy) *(Théorème des Valeurs Intermédiaires)*
Si f est continue sur $[a,b]$ alors pour tout μ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \mu$.

Corollaire 3.11 *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Théorème 3.12 *Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $f(I)$. De plus f^{-1} est continue et varie dans le même sens que f.*

Définition 3.13 *f est dite* **uniformément continue** *sur I si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, x' \in I(|x - x'| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon). \tag{3.4}$$

Théorème 3.14 (Heine-Cantor) [1] *f est continue sur $[a,b]$ ssi f est uniformément continue sur $[a,b]$.*

1. Heinrich Eduard Heine (1821-1881), mathématicien allemand

3.2 Exercices

Exercice 1. Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Etudier $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$.

Exercice 2. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \to 0} xE(\frac{1}{x})$, $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x}$, $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$, $b \neq 0$.

Exercice 3. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

Exercice 4.

1. Montrer que toute fonction périodique et non constante n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Montrer que toute fonction croissante et majorée admet une limite finie en $+\infty$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x).$$

Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 6. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax$.

Chapitre 4

Dérivation-Formule de Taylor

4.1 Résumé de Cours

Toutes les fonctions considérées sont des fonctions réelles d'une variable réelle.

Définition 4.1 *1. f est dite* **dérivable** *en a si*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

2. f est dite dérivable sur un ensemble si elle l'est en tout point de l'ensemble.

Cette limite est alors notée $f'(a)$.

Théorème 4.2 *Si f est dérivable en a alors f est continue en a.*

Théorème 4.3 (Leibniz) [1]

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}. \tag{4.2}$$

Définition 4.4 *Soit I un intervalle, $n \in \mathbb{N}^*$. f est dite de classe C^n sur I si f est dérivable n fois sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I.*
Dans le cas particulier où f est indéfiniment dérivable sur I, on dit que f est de classe C^∞ sur I.
La classe C^0 correspond à celle des fonctions continues.

1. Gottfried Wilheim Leibniz (1646-1716), mathématicien et philosophe allemand

Définition 4.5 *f est dite* **différentiable** *en a s'il existe une fonction $\varepsilon : h \mapsto \varepsilon(h)$ définie dans un voisinage de 0 et un nombre $a \in \mathbb{R}$, indépendante de h, tels que*

$$f(a+h) - f(a) = ah + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0. \tag{4.3}$$

Théorème 4.6 *f est différentiable en a ssi f est dérivable en a.*

Théorème 4.7 (Rolle) [2]
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction.

$$\text{Si} \quad \begin{cases} f & \text{est continue sur } [a,b] \\ f & \text{est dérivable sur }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{cases}$$

alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 4.8 *(des accroissements finis)*
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

$$\text{Si} \quad \begin{cases} f & \text{est continue sur } [a,b] \\ f & \text{est dérivable sur }]a,b[\end{cases}$$

alors il existe $c \in]a,b[$ tels que

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c). \tag{4.4}$$

Théorème 4.9 *(des accroissements finis généralisé) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ tels que $\forall x \in]a,b[, g'(x) \neq 0$.*
Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{4.5}$$

Définition 4.10 *On dit que f admet*

1. *un maximum (resp. minimum) local en x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 tel que*
$$\forall x \in V, f(x) \leq f(x_0) (\text{ resp. } f(x) \geq f(x_0)). \tag{4.6}$$

2. Michel Rolle (1652-1719), mathématicien français

2. *un extremum local en* x_0 *si* f *admet un maximum ou un minimum local en* x_0.

Théorème 4.11 *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *dérivable sur* $]a,b[$. *Si* f *admet un extremun local en* $x_0 \in]a,b[$ *alors* $f'(x_0) = 0$.

Théorème 4.12 (Règle de LHôpital) [3]

$$\text{Si } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \text{ ou } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

$$\text{alors } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ si cette dernière existe.}$$

Théorème 4.13 *(Taylor[4]-Lagrange[5]) Si* f *admet des dérivées jusqu'à l'ordre* n *continues sur* $[a,b]$ *et une dérivée d'ordre* $n+1$ *sur* $]a,b[$ *alors il existe* $c \in]a,b[$ *tel que :*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \tag{4.7}$$

Remarque : Le cas particulier $[a,b] = [0,x]$ donne la formule de Mac-Laurin.

Proposition 4.14 *(Dérivées usuelles)*

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$sinx$	$\cos x$
$cosx$	$-\sin x$
$tanx$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$Arctanx$	$\frac{1}{1+x^2}$
$Arctan\frac{x}{a}$	$\frac{a}{x^2+a^2}$
$Arcsinx$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$Arcosx$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
shx	chx
chx	shx
thx	$1-th^2x = \frac{1}{ch^2x}$
$Argthx$	$\frac{1}{1-x^2}$
$Argshx$ $Argchx$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

3. Guillaume Francis Antoine, Marquis de l'Hôpital (1661-1704), mathématicien français
4. Brook Taylor (1685-1731), mathématicien anglais
5. Joseph Louis Lagrange (1736-1813), mathématicien français

4.2 Exercices

Exercice 1. Enoncer le théorème de Rolle et celui des accroissements finis. Expliquer en quoi ce dernier est une généralisation du théorème de Rolle.

Exercice 2.
Dans l'application du théorème des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \ (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$$

sur l'intervalle $[a, b]$ préciser le nombre réel c de $]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Interprèter géométriquement le résultat.

Exercice 3. Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

existe alors elle est appelée **dérivée symétrique** de f en a et notée $f'_s(a)$.

1. Montrer que si f est dérivable en a alors $f'_s(a) = f'(a)$.
2. Exprimer $f'_s(a)$ en fonction de $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$.
3. Dans cette question on prend f défini par
$$\begin{cases} f(x) = x \sin \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$
Etudier l'existence de $f'_s(0)$, $f'_g(0)$ et $f'_d(0)$.
4. Si f est croissante sur $]\alpha, \beta[$ et $a \in]\alpha, \beta[$ que dire du signe de $f'_s(a)$?

Exercice 4. Le polynôme $X^n + aX + b$ (a, b réels, n entier naturel) admet-il plus de trois racines réelles ?

Exercice 5. Soit I un intervalle contenant 0 et non réduit à 0. Soit f une fonction dont la dérivée première est continue sur I et possède une dérivée seconde en 0. On considère les fonctions g et h définies par $\forall x \in I$,

$$g(x) = f(x) - f(0) - xf'(0), \ h(x) = f(x) - f(0) - xf'(0) - x^2 \frac{f''(0)}{2}.$$

On admet que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{h(x)}{x^2} = 0$.

1. Démontrer que $\dfrac{g(x)}{x^2}$ admet une limite finie que l'on déterminera.
2. On considère la fonction F définie sur I par

$$F(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } F(0) = f'(0).$$

   a) Montrer que F est continue en 0.
   b) Etudier la dérivabilité de F en 0.
   c) Montrer pour $x \neq 0$, $F'(x) = \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x} - \dfrac{g(x)}{x^2}$.

Exercice 6. Soit I un intervalle, $a \in I \neq \{a\}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$. On suppose que $f''(a) \neq 0$. On note J l'intervalle déduit de I par la translation $-a$ et $\theta : J \to]0,1[$ la fonction de h vérifiant

$$\forall h \in J,\ f(a+h) = f(a) + hf'(a + \theta(h)h).$$

Etudier $\lim\limits_{h \to 0} \theta(h)$.

Exercice 7. On considère la fonctio f définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Montrer que $f'(0) = 0$. A-t-on $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0$?

Exercice 8. Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, deux fois dérivable. On suppose que f et f'' sont bornées. On désire montrer qu'alors f' est bornée.On pose

$$\alpha = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|,\ \beta = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|.$$

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0, |f'(x)| \leq \frac{2\alpha}{h} + \frac{h\beta}{2}.$$

2. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leq 2\sqrt{\alpha\beta}$.

Chapitre 5

Développements Limités

5.1 Résumé de Cours

Définition 5.1 *On dit que f admet un* **développement limité** *(d.l.) d'ordre n au voisinage de 0 si*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \circ(x^n). \tag{5.1}$$

Le polynôme P défini par $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ est appelé **partie régulière** de f.

Remarque : En posant

$$u = x - a \text{ ou } u = \frac{1}{x},$$

on ramène l'étude d'une fonction au voisinage de a ou ∞ à l'étude de cette fonction au voisinage de 0.

Théorème 5.2 *Si f admet un d.l. d'ordre n au voisinage 0 alors ce d.l. est unique.*

Théorème 5.3 *Si f admet un d.l. d'ordre n au voisinage de 0, elle admet dans ce voisinage, un d.l. d'ordre r pour tout entier $r \leq n$.*

Théorème 5.4 *Si f admet un d.l. d'ordre n au voisinage 0 de partie régulière P et si f est paire (resp. impaire) alors P est paire (resp. impaire).*

Théorème 5.5 (de Taylor-Young) [1] *Si f est de classe C^{n-1} dans un voisinage de 0 et si $f^{(n)}(0)$ existe alors f admet un d.l. d'ordre n donné par*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \circ(x^n). \tag{5.2}$$

Théorème 5.6 *Si $f(x) = P(x) + \circ(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + \circ(x^n)$ alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha P(x) + \beta Q(x) + \circ(x^n)$.*

Théorème 5.7 *Si $f(x) = P(x) + \circ(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + \circ(x^n)$ alors $(fg)(x) = (PQ)_n(x) + \circ(x^n)$ où $(PQ)_n(x)$ est obtenue en tronquant $P(x)Q(x)$ au degré n.*

Théorème 5.8 *Si $f(x) = P(x) + \circ(x^n)$, $g(x) = Q(x) + \circ(x^n)$ et si $Q(0) \neq 0$ alors $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = D(x) + \circ(x^n)$ où $D(x)$ est le quotient de la division suivant les puissances croissantes, à l'ordre n, de P par Q.*

Théorème 5.9 *Si $f(x) = P(x) + \circ(x^n)$, $g(x) = Q(x) + \circ(x^n)$ et $Q(0) = 0$ alors $(f \circ g)(x) = (P \circ Q)_n(x) + \circ(x^n)$ où $(P \circ Q)_n(x)$ est obtenue en tronquant au degré n le polynôme $(P \circ Q)(x)$.*

Théorème 5.10 *Si f est dérivable dans un voisinage de 0 et si*

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \circ(x^n) \tag{5.3}$$

alors

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \ldots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + \circ(x^{n+1}). \tag{5.4}$$

Théorème 5.11 *Si $f^{(n)}(0)$ existe et si*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \circ(x^n) \tag{5.5}$$

alors

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \circ(x^{n-1}). \tag{5.6}$$

1. William Henry Young (1863-1942), mathématicien anglais

Définition 5.12 *Soit f une fonction définie au voisinage de 0 sauf peut-être en 0. S'il existe un réel r tel que*

$$x^r f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \circ(x^n) \tag{5.7}$$

alors

$$f(x) = \frac{1}{x^r}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n) + \circ(x^{n-r}). \tag{5.8}$$

C'est le **d.l. généralisé** *de f à l'ordre $n-r$ au voisinage de 0.*

Proposition 5.13

$f(x)$	*d.l. de* $f(x)$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$
e^x	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$(1+x)^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
$sinx$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
shx	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$cosx$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
chx	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$tanx$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$
thx	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$
$Arcsinx$	$x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
$Arccosx$	$\frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
$Arctanx$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
$Argshx$	$x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
$Argthx$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$

5.2 Exercices

Exercice 1. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{exp(x^2) - \cos x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$.

Exercice 2. Déterminer

1. le d.l. à l'ordre 4 de $f_1(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ au voisinage de 1.

2. le d.l. à l'ordre 3 de $f_2(x) = \dfrac{xe^x}{1-x^2}$ au voisinage de 0.
3. le d.l. à l'ordre 4 de $f_3(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \ln\sqrt{1+x^2}$ au voisinage de $+\infty$.
4. le d.l. à l'ordre n de $f_4(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-2x+1}$.

Exercice 3. On rappelle que $chx = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = (chx)^{\frac{1}{x}}$.
Prolonger f par continuité en 0 puis étudier ce prolongement.

Exercice 4.

1. Déterminer le d.l. à l'ordre 2, au voisinage de 0, de f définie par

$$f(t) = \frac{t^2}{e^t-1} \text{ si } x \neq 0,\ f(0) = 0.$$

2. En déduire le d.l. à l'ordre 3, au voisinage de 0, de $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

Chapitre 6

Fonctions Convexes

6.1 Résumé de Cours

Soit I un intervalle d'intérieur noté $\mathrm{int}(I)$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.

Définition 6.1 *1. f est dite* **convexe** *si*

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall t \in [0,1], f[tx + (1-t)y] \leq tf(x) + (1-t)f(y). \qquad (6.1)$$

2. f est dite **concave** *si $-f$ est convexe.*

Théorème 6.2 *Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. f est convexe.

2. $\forall (x,y,z) \in I^3$, si $x < y < z$ alors

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}. \qquad (6.2)$$

3. $\forall a \in I$, la fonction $F_a : x \in I \setminus \{a\} \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante.

Théorème 6.3 *f est convexe sur I ssi pour tous réels $x_1, \ldots, x_n \in I$ et pour tous réels positifs $t_1, \ldots, t_n$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$, on a*

$$f(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i). \qquad (6.3)$$

Soit (O,I,J) un repère du plan affine (P) et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans ce repère.

Un point $A(a,b)$ est dit au-dessus (resp. en-dessous) de $\mathcal{C}_f$ si $a \in I$ et $b \geq f(a)$(resp. $b \leq f(a)$).
On appelle **épigraphe** de f l'ensemble des points de (P) situés au dessus de $\mathcal{C}_f$.

Théorème 6.4 *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *f est convexe sur I.*
2. *L'épigraphe de f est une partie convexe du plan (P).*

Définition 6.5 *Soit $a \in I$ et h une fonction affine telle que $h(a) = f(a)$. On dit que h est une* **fonction d'appui** *de f en a si*

$$\forall x \in I, \ h(x) \leq f(x).$$

La droite représentative de h est alors appelée **droite d'appui** *de $\mathcal{C}_f$ en M_a.*

Théorème 6.6 *Supposons f continue sur I et dérivable sur $int(I)$. Alors f est convexe sur I ssi la tangente à $\mathcal{C}_f$ en chacun de ses points d'abscisse dans $int(I)$ est une droite d'appui de $\mathcal{C}_f$ en ce point.*

Théorème 6.7 *Supposons que f soit deux fois dérivable sur I.
Pour que f soit convexe sur I, il faut et il suffit que f'' soit positive sur I.*

Théorème 6.8 *Si f est convexe sur I alors f est continue sur $int(I)$.*

Théorème 6.9 *Soient $x_1, \ldots, x_n > 0$ et $t_1, \ldots, t_n \geq 0$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$. Alors*

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{t_i} \leq \sum_{i=1}^{n} t_i x_i.$$

Théorème 6.10 *Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $u, v > 0$. Alors*

$$uv \leq \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q.$$

Théorème 6.11 (Inégalité de Hölder) [1] *Soient* $p, q \in]0, +\infty[$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ *des réels strictement positifs. Alors*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Théorème 6.12 (Inégalité de Minkowski) [2] *Soit* p *tel que* $p > 1$, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ *des réels strictement positifs. Alors*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

6.2 Exercices

Exercice 1. Donner un exemple de fonction définie sur un intervalle, convexe et non continue.

Exercice 2. Soit $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Déterminer a, b, c pour que f soit convexe pour $x \geq 0$ et concave pour $x < 0$.

Exercice 3. Soit $f(x) = ax^3 + bx$, $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Etudier la convexité de f suivant les valeurs de a et b.

Exercice 4. Soient $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Montrer que

1. $(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i)^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2$, $(x_i \in \mathbb{R})$.
2. $\ln(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) \geq \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \ln x_i$, $(\alpha_i > 0, x_i > 0)$.
3. $\dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i} \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i}{x_i}$, $(\alpha_i \geq 0, x_i > 0)$.

---

1. Otto Ludwig Hölder, (1859-1937), mathématicien allemand
2. Hermann Minkowski (1864-1909), mathématicien allemand

Exercice 5. Soit $\alpha > 1$ et $x_1, \ldots, x_n > 0$. Montrer que

$$(x_1 + \ldots + x_n)^\alpha \leq n^{\alpha-1}(x_1^\alpha + \ldots + x_n^\alpha).$$

Exercice 6. Ecrire l'inégalité de Hölder dans le cas $p = q = 2$ et $n = 2$ et l'interpréter.

Chapitre 7

Séries Numériques

7.1 Résumé de Cours

Définition 7.1 *Soit (u_n) une suite de nombres réels. On pose*

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n. \tag{7.1}$$

Une série numérique de terme général u_n le couple $((u_n), (s_n))$. Elle est notée $\sum u_n$. La suite (s_n) est appelée **suite des sommes partielles** *de la série $\sum u_n$.*

Définition 7.2 *1. La série $\sum u_n$ est dite convergente si la suite (s_n) est convergente. Si (s_n) n'est pas convergente, on dit que la série $\sum u_n$ est divergente.*

2. Si $\sum u_n$ est convergente alors la limite s de la suite (s_n) est appelée somme de la série $\sum u_n$ et on écrit $s = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

3. Le nombre $r_n = s - s_n = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} u_p$ est appelé **reste** *de la série $\sum u_n$.*

Remarque. Si (u_n) n'est définie qu'à partir de n_0, alors $s_n = u_{n_0} + u_1 + \ldots + u_n$. Si (s_n) converge alors la somme de la série $\sum u_n$ est notée $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Théorème 7.3 *Si la série $\sum u_n$ converge alors la suite (u_n) converge vers 0.*

Théorème 7.4 *Soit* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction positive décroissante et* $u_n = f(n)$. *Alors*

$$\int_b^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge ssi } \sum_{n=b}^{+\infty} u_n \text{ converge.} \tag{7.2}$$

Théorème 7.5 (Série de Riemann) [1] *La série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$, *converge si et seulement si* $p > 1$.

Théorème 7.6 (Série de Bertrand) *Soit la série* $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

1. *Si* $\alpha < 1$ *alors la série diverge pour tout* β.
2. *Si* $\alpha > 1$ *alors la série converge pour tout* β.
3. *Si* $\alpha = 1$ *alors la série converge ssi* $\beta > 1$.

N.B : Les trois théorèmes qui suivent concernent les séries à termes positifs.

Théorème 7.7 (Le test de comparaison)

1. *Si* $0 \leq u_n \leq k v_n$, $k > 0$ *alors*
   $\sum v_n$ *converge* $\Rightarrow \sum u_n$ *converge* ,
   $\sum u_n$ *diverge* $\Rightarrow \sum v_n$ *diverge* .
2. *Soit* $l = \lim \frac{u_n}{v_n}$.
   Si $l = 0$ *alors* $\sum v_n$ *converge implique* $\sum u_n$ *converge.*
   Si $l > 0$ *alors* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature.*
   Si $l = +\infty$ *alors* $\sum v_n$ *diverge implique* $\sum u_n$ *diverge.*

Théorème 7.8 (Critère de d'Alembert) [2] *Soit* $l = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$. *On a :*
Si $l < 1$ *alors la série* $\sum u_n$ *converge.*
Si $l > 1$ *alors la série* $\sum u_n$ *diverge.*
Si $l = 1$ *alors on ne peut rien dire. On dit que l'on est dans le cas douteux du critère de d'Alembert.*

---

1. Bernhard Riemann (1826-1866), mathématicien allemand
2. Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1783), mathématicien et encyclopédiste français

Théorème 7.9 (Critère de Cauchy) *Soit* $l = \sqrt[n]{u_n}$. *On a :*
Si $l < 1$ *alors la série* $\sum u_n$ *converge.*
Si $l > 1$ *alors la série* $\sum u_n$ *diverge.*
Si $l = 1$ *alors on ne peut rien dire. On dit que l'on est dans le cas douteux du critère de Cauchy.*

Définition 7.10 *Une série* $\sum u_n$ *est dite* **absolument convergente** *si la série* $\sum |u_n|$ *est convergente.*

Théorème 7.11 *Toute série absoluement convergente est convergente.*

Définition 7.12 *Une série est dite* **alternée** *si son terme général* u_n *est de la forme* $u_n = (-1)^n v_n$ *où* v_n *est de signe constant.*

Théorème 7.13 *Une série alternée* $\sum u_n$ *converge ssi la suite* $|u_n|$ *converge vers* 0 *en décroissant.*

Définition 7.14 *Une série est dite* **semi-convergente** *si elle est convergente mais pas absolument convergente.*

7.2 Exercices

Exercice 1. Calculer la somme des séries convergentes suivantes : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3+3n-1}{n!}$.

Exercice 2 . Etudier la nature des séries : $\sum \frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^5+1}}$, $\sum \frac{1}{n^2[1+\frac{1}{2}\sin(n\pi/4)]}$, $\sum \frac{1-e^{-n}\ln n}{n}$, $\sum \cos\frac{\pi}{n^2}$, $\sum \sin\frac{\pi}{n^2}$, $\sum \frac{1}{n}\tan\frac{\pi}{n}$, $\sum \frac{\ln n}{n^2}$.

Exercice 3 . Trouver toutes les valeurs de $p \geq 0$ pour lesquelles les séries convergent.
(a) $\sum \frac{n}{(n^2-1)^p}$, (b) $\sum \frac{n^2}{(n^3+4)^p}$, (c) $\sum \frac{\sinh n}{(\cosh n)^p}$, (d) $\sum \ln(\frac{2+n^p}{1+n^p})$

Exercice 4. On rappele que la série harmonique alternée converge et apour somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$

1. Montrer que les séries $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n})$ et $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n})$ converge et calculer leur somme.
2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{4x^3-x}$.
3. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^3-n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 5.

1. On considère la suite (u_n) définie par : $0 < u_n < 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

2. Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?
3. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge.
4. Montrer que les séries de termes généraux $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ et u_n divergent.
5. Montrer que $u_n < \frac{1}{n+1}$ et que la suite (nu_n) est croissante. Justifier que (nu_n) admet une limite l.

Bibliographie

[1] A. Boussari, *Calcul différentiel dans* $\mathbb{R}$, Monographe (Communication personnelle).

[2] A. Donedu, *Topologie, Fonctions réelles d'une variable réelle.* Tome 4, Vuibert (1979)

[3] Eric Lehman, *Mathématiques pour l'étudiant de 1re année*, Analyse, Collection DIA, Belin (1984)

[4] M. Messeri, *Exercices de Mathématiques* , Analyse I, Collection DIA, Belin (1987)

[5] William F. Trench, *Introduction to real analysis*, Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, (2009)

Reçu : janvier, 2012